تمرين دالة عددية

من إعداد : خالد بخاخشة

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-6x^2+12x-2$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.1<\alpha<0.2$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

2) أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون : من أجل كل $x\neq 2$ ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

جـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ- بين أنه من أجل كل $x\neq 2$ فإن : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x-2)^3}$.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن : $f(\alpha)=-2+\dfrac{9}{(\alpha-2)^2}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 3 .

6) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.7$)

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-m$.

8) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(-|x|)$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة h عند 0 .

ب- بين أن الدالة زوجية ، ثم أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

يوم 2020_10_04

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x^3-6x^2+12x-2$

① أ. حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

* $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-6x^2+12x-2$

$=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty.$

* $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم نشكل ج ت.

* حساب المشتقة

$g'(x)=3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)$

$g'(x)=3(x-2)^2.$

* دراسة إشارة المشتقة

بما أن $(x-2)^2>0$ ومنه $3(x-2)^2>0$

ومنه $g'(x)>0$

نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

* جدول التغيرات،

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		
$g(x)$	$-\infty$ سالبة	$\nearrow$ موجبة	$+\infty$

② أ. اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}2$

* من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ وبالأخص $]0{,}1;0{,}2[$.

* ولدينا $\left.\begin{array}{l} g(0{,}1)=-0{,}85 \\ g(0{,}2)=+0{,}168 \end{array}\right\}$

ومنه $g(0{,}1)\times g(0{,}2)<0$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $0{,}1<\alpha<0{,}2$ حيث $\boxed{g(\alpha)=0}$

ب. استنتاج إشارة $g(x)$.

من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

$$f(x)=\frac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2} \quad (II$$

$$D=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$$

① أ. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+4x^2-4x+3}{x^2-4x+4}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

ب. حساب $\lim_{x\to 2} f(x)$ ثم تفسير النتيجة

* $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

$= \frac{-2^3+4\times 2^2-4\times 2+3}{(2-2)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty$

* $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \frac{+3}{0^+} = +\infty.$

② أ. تعيين الأعداد الحقيقية a.b.c بحيث يكون من أجل كل $x \neq 2$

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$$

لدينا: $f(x) = \frac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2} \to ①$

$f(x) = \frac{(ax+b)(x-2)^2+c}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{ax^3-4ax^2+4ax-bx^2-4bx+4b+c}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{ax^3+(-4a-b)x^2+(4a-4b)x+4b+c}{(x-2)^2}$ ← ②

بالمطابقة بين ① و ② نجد:

$a=-1$

$-4a-b=4$ ومنه $b=-4a-4=0$

$4b+c=3$ ومنه $c=3$

اذن

$$f(x) = -x+\frac{3}{(x-2)^2}$$

ب. استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

لدينا $f(x) = -x+\frac{3}{(x-2)^2}$

لأن $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{(x-2)^2} = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ هو مقارب مائل لـ (C_f)

جـ. دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى (Δ):

ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا $f(x)-y = -x+\frac{3}{(x-2)^2}-(-x)$

$f(x)-y = \frac{3}{(x-2)^2}.$

علما أن $3>0$ و $(x-2)^2>0$ فإن

$f(x)-y > 0$

ومنه فإن C_f يقع فوق (Δ)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\frac{3}{(x-2)^2}$	+
$f(x)-y$	+
الوضعية	C_f يقع فوق (Δ).

③ أ. إثبات أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-2)^3}$

$$f'(x) = \frac{(-3x^2+8x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(-x^3+4x^2-4x+3)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)\left[(-3x^2+8x-4)(x-2) - 2(-x^3+4x^2-4x+3)\right]}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{-3x^3+6x^2+8x^2-16x-4x+8+2x^3-8x^2+8x-6}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{-x^3+6x^2-12x+2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^3-6x^2+12x-2)}{(x-2)^3} = \frac{-g(x)}{(x-2)^3}$$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

* إشارة المشتقة

لدينا: $x-2=0$ ومنه $x=2$.

x	$-\infty$ … α	α … 2	2 … $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0	$+$	$+$
$-g(x)$	$+$ 0	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)=\frac{-g(x)}{(x-2)^3}$	$-$ 0	$+$	$-$
$f(x)$	متناقصة	متزايدة	متناقصة

* جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	

④ إثبات أن $f(\alpha) = -2 + \frac{9}{(\alpha-2)^2}$ ثم إعطاء حصرا لـ $f(\alpha)$.

لدينا $f(x) = \frac{-x^3+4x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

ومنه $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3+4\alpha^2-4\alpha+3}{(\alpha-2)^2}$ → (*)

ولدينا $g(x) = x^3-6x^2+12x-2$

ومنه $g(\alpha) = \alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-2$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(\alpha)=0$

ومنه $\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-2=0$

ومنه $\alpha^3 = 6\alpha^2-12\alpha+2$

بالتعويض في المعادلة (*)

$$f(\alpha) = \frac{-(6\alpha^2-12\alpha+2)+4\alpha^2-4\alpha+3}{(\alpha-2)^2}$$

$$= \frac{-6\alpha^2+12\alpha-2+4\alpha^2-4\alpha+3}{(\alpha-2)^2}$$

$$= \frac{-2\alpha^2+8\alpha+1}{(\alpha-2)^2} = \frac{-2\alpha^2+8\alpha-8+9}{(\alpha-2)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2(\alpha^2-4\alpha+4)+9}{(\alpha-2)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-2)^2+9}{(\alpha-2)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-2)^2}{(\alpha-2)^2} + \frac{9}{(\alpha-2)^2}$$

$$f(\alpha) = -2 + \frac{9}{(\alpha-2)^2}$$

إعطاء حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا $0.1 < \alpha < 0.2$

$-1.9 < \alpha - 2 < -1.8$

$3.24 < (\alpha-2)^2 < 3.61$

$\frac{1}{3.61} < \frac{1}{(\alpha-2)^2} < \frac{1}{3.24}$

$0.277 < \frac{1}{(\alpha-2)^2} < 0.308$

$2.493 < \frac{9}{(\alpha-2)^2} < 2.77$

$0.493 < -2 + \frac{9}{(\alpha-2)^2} < 0.77$

$0.493 < f(\alpha) < 0.47$

⑤ كتابة المماس T للمنحنى C_f عند النقطة $x_0 = 3$

$y_T = f'(3)(x-3) + f(3)$

حيث $f'(3) = \frac{-8(3)}{(3-2)^3} = -7$

$f(3) = 0$

ومنه $y_T = -7(x-3) = -7x+21.$

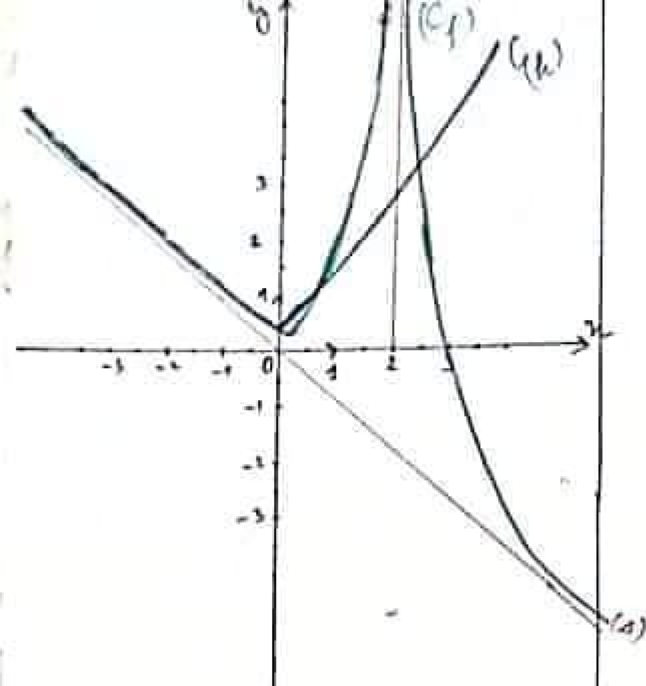
معادلة المماس $\boxed{y_T = -7x + 21}$

⑥ انشئ كلا من (C_f) و (Δ).

⑦ مناقشة بيانية عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -m$

لدينا ~~f(x)~~

مناقشة أفقية



نناقش في أول الأمر حلول المعادلة $f(x) = m$.

⊛ $m \in]-\infty, f(\alpha)[$ يوجد حل وحيد موجب

⊛ $m = f(\alpha)$ يوجد حلين موجبين أحدهما مضاعف.

⊛ $m \in]f(\alpha), +\infty[$ يوجد 3 حلول (موجبة وسالب)

ندخل الآن إشارة (-) على الإجابات

⊛ $m \in]-\infty, -f(\alpha)[$ يوجد 3 حلول موجبة وسالب

⊛ $m = -f(\alpha)$ يوجد حلين موجبين أحدهما مضاعف

⊛ $m \in]-f(\alpha), +\infty[$ يوجد حل وحيد موجب

③ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$

ب: $h(x)=f(-|x|)$.

أ. دراسة قابلية اشتقاق الدالة h عند 0.

لدينا
$$|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x>0\end{cases}$$

ومنه:
$$h(x)=\begin{cases}f[-(-x)] & x<0\\ f[-(x)] & x>0\end{cases}$$

ومنه
$$h(x)=\begin{cases}f(x) & x<0\\ f(-x) & x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-\frac{3}{4}}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\frac{4f(x)-3}{4}}{x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{4(-x^3+4x^2-4x+3)-3}{4x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-4x^3+16x^2-16x+12-3}{4x}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-4x^3+16x^2-16x+9}{4x}=\frac{9}{0^-}=-\infty$$

نستنتج أن الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ب. اثبات أن الدالة h زوجية ثم انشاء المنحنى C_h انطلاقا من C_f.

لدينا
$$h(-x)=f(-|-x|)$$

بما أن $|-x|=|x|$.

فإن
$$h(-x)=f(-|x|)=h(x)$$

ومنه فإن الدالة h زوجية.
بيانها يقبل محور التراتيب كمحور تناظر.

* على المجال $]-\infty,0[$

C_h ينطبق على C_f لأن $h(x)=f(x)$

* على المجال $]0,+\infty[$

~~[illegible]~~ نرسم النظير بالنسبة الى محور التراتيب كما هو موضح في الشكل السابق.